Απειροστικός Λογισμός Ι Μάθημα 27 20/01/2016 ①

Ασκήσεις 3ου φυλλαδίου

Άσκηση 4: Δείξτε ότι η εξίσωση $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Απόδειξη:

Θέτουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-ax-bx-cx$.

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-a-b-c$$

f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$
και f συνεχής στο $[0,1]$
$f(0)=0$ και $f(1)=0$

Από Θεώρημα Rolle $\exists\, \xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$
$\Rightarrow$ Το ξ ικανοποιεί την παραπάνω σχέση.

Άσκηση 5: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $x(f(x)+x)=$
$=e^{6x}+(x-1)(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $\xi\neq 0$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο 0 να προσδιορίσετε την τιμή $f(0)$ και να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Απόδειξη:

α) $xf(x)+x^2=e^{6x}+x^2-1$

Για $x\neq 0$: $f(x)=\dfrac{e^{6x}-1}{x}$ Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

β) Η f συνεχής στο 0

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{x}=6$$

Έτσι f συνεχής στο 0

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{6x}-1}{x}, & x\neq 0\\ 6, & x=0\end{cases}$$

Για $x\neq 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\frac{e^{6x}-1}{x}-6}{x-0}=\dfrac{e^{6x}-1-6x}{x^2}$

$h(x)=e^{6x}-1-6x$ και $g(x)=x^2$, $\lim_{x\to 0}h(x)=0$, $\lim_{x\to 0}g(x)=0$.

$h'(x) = 6e^{6x} - 6$ και $g'(x) = 2x$

$$\frac{h'(x)}{g'(x)} = \frac{6e^{6x}-6}{2x} = \frac{6}{2} \cdot 6 \, \frac{e^{6x}-1}{6x} \xrightarrow{x \to 0} 18$$

Άρα, από κανόνα De L'Hospital $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 18$.

Δηλαδή, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 18$, δηλαδή $f'(0) = 18$.

__Άσκηση 7:__ Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με $f'(x)g(x) \neq g'(x) \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει μια (τουλάχιστον) ρίζα της g.

β) Να δειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της g.

__Απόδειξη:__

α) Έστω $a < b$ δύο ρίζες της f. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$

Από τη σχέση $f'(x)g(x) \neq g'(x) \cdot f(x)$ εφόσον $f(a) = 0$ προκύπτει $g(a) \neq 0$ και εφόσον $f(b) = 0$ προκύπτει $g(b) \neq 0$.

Ορίζουμε $h: [a, b] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$

Η h παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και $h(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = 0$ και $h(b) = \frac{f(b)}{g(b)} = 0$

Από Θεώρημα Rolle $\exists \xi \in (a, b)$ ώστε $h'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) \cdot g(\xi) = f(\xi) \cdot g'(\xi)$ Άτοπο!

Άρα, η g έχει ρίζα στο (a, b).

β) Έστω $a < b$ δύο διαδοχικές ρίζες της f (δηλαδή $f(a) = 0 = f(b)$ και $f(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$)

Από το α) η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, b).

Υποθέτουμε ότι η g έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (a, b).

Δηλαδή υπάρχουν $a < \gamma < \delta < b$ ώστε $g(\gamma) = g(\delta) = 0$.

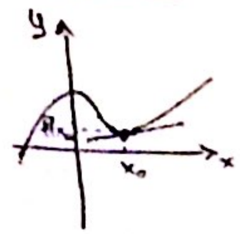
Όπως στο α) [διότι οι υποθέσεις της άσκησης είναι συμμετρικές προς f, g]

Μεταξύ δύο ριζών της g $\exists$ τουλάχιστον μια ρίζα της f.

$\exists \xi \in (\gamma, \delta)$ με $f(\xi) = 0$. Άτοπο, διότι a, b διαδοχικές ρίζες της f. Επομένως, η g έχει ακριβώς μια ρίζα στο (a, b).

Άσκηση 9: Να βρείτε τιμές για τις σταθερές a, b, c ώστε οι γραφικές παραστάσεις των πολυωνύμων $f(x)=x^2+ax+b$ και $g(x)=x^3-c$ να τέμνονται στο σημείο (1,2) και να έχουν σε αυτό κοινή εφαπτομένη.

Απόδειξη:



$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f'(x_0)\cdot x+(f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0)$

Πρέπει: $f(1)=2$
$g(1)=2$
$f'(1)=f'(2)$

$$\left.\begin{aligned} 2&=1+a+b\\ 2&=1-c\\ 2+a&=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b&=0\\ c&=-1\\ a&=1\end{aligned}$$

Άσκηση 10: Να γίνει πλήρης μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x)=\frac{\log x}{x}$.

Απόδειξη:

Πεδίο ορισμού: $(0,+\infty)$

Παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$

και $f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\log x)2x}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\log x}{x^4}=\frac{-3+2\log x}{x^3}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\log x=0 \Leftrightarrow \log x=1 \Leftrightarrow x=e$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow (1-\log x)\cdot x^{-2}>0 \Leftrightarrow 1-\log x>0 \Leftrightarrow x\in(0,e)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(e,+\infty)$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο στο e με τιμή

$$f(e)=\frac{\log e}{e}=\frac{1}{e}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\log x=3 \Leftrightarrow \log x=3/2 \Leftrightarrow x=e^{3/2}$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow (2\log x-3)x^{-3}>0 \Leftrightarrow x\in(e^{3/2},+\infty)$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0,e^{3/2})$.

Άρα, η f είναι κυρτή στο $[e^{3/2},+\infty)$ και κοίλη στο $(0,e^{3/2}]$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $e^{3/2}$ με τιμή $f(e^{3/2})=\frac{\log e^{3/2}}{e^{3/2}}=\frac{3}{2e^{3/2}}$.

x	0		e		$e^{3/2}$		$+\infty$
f'		+	0	−		−	
f''		−		−	0	+	
f		↗		↘		↘	

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to0^+}\log x\cdot\frac{1}{x}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$.

(διότι $\lim_{x\to0^+}\log x=-\infty$, $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$)

Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη από δεξιά την $x=0$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0$

Εφόσον $\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty$

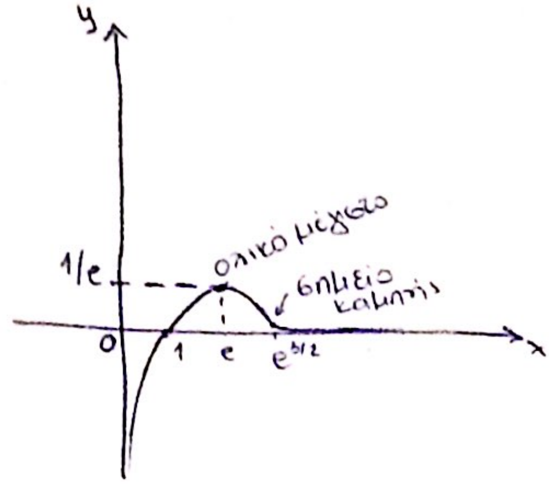
και $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\frac{(\log x)'}{(x)'}=\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{x}\xrightarrow{x\to+\infty}0$

Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Γραφική Παράσταση της $f(x)=\frac{\log x}{x}$:



<u>Άσκηση 8</u>: Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\log(\log(\log x))$.

(i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f καθώς και η παράγωγός της.

(ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη e^e.

<u>Απόδειξη:</u>

(i) $f(x)=\log(\log(\log x))$

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ \log x>0 \Leftrightarrow x>1 \\ \log(\log(x))>0 \Leftrightarrow x>e \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Άρα, } x\in(e,+\infty).$$

$$f'(x)=\frac{1}{\log(\log x)}\cdot(\log(\log x))'=\frac{1}{\log(\log x)}\cdot\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}$$

(ii) $f(e^e)=\log(\log(\log e^e))=\log(\log e)=\log 1=0$.

$$f'(e^e)=\frac{1}{\log(\log e^e)}\cdot\frac{1}{\log e^e}\cdot\frac{1}{e^e}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e^e}=\frac{1}{e^{e+1}}.$$

$$y-f(e^e)=f'(e^e)(x-e^e) \Rightarrow y-0=\frac{1}{e^{e+1}}(x-e^e)\Rightarrow y=\frac{1}{e^{e+1}}(x-e^e).$$

<u>Άσκηση 15</u>: Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της ακολουθίας με τύπο $a_n=\sqrt[n]{n}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Αν $f(x)=x^{1/x}$ $x>0$ $a_n=f(n)$

άρα $f(x)=e^{\log x^{1/x}}=e^{\frac{1}{x}\log x}$

$f'(x)=\left(e^{\frac{1}{x}\log x}\right)'=e^{\frac{1}{x}\log x}\left(\frac{1}{x}\log x\right)'=x^{\frac{1}{x}}\,\frac{(1-\log x)}{x^2}$

Άρα, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,e)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(e,+\infty)$

Η f γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$

Εφόσον $1,2\in(0,e]$: $\overset{a_1}{f(1)}<\overset{a_2}{f(2)}$

Εφόσον $3,4,5,\ldots\in[e,+\infty)$: $\underset{a_3}{f(3)}>\underset{a_4}{f(4)}>\underset{a_5}{f(5)}>\ldots$

$a_2=\sqrt{2}$, $a_3=\sqrt[3]{3}$.

$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6\Leftrightarrow 8<9$

Άρα $\sqrt[3]{3}=a_3$ η μέγιστη τιμή της ακολουθίας

Άσκηση 11: Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+4x$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και επι θέτουμε $f(0)=\alpha, f(1)=\beta, f(\sqrt{2})=\gamma$ και $f(2)=\delta$. Να εξετάσετε αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ και, σε όσα από αυτά είναι, να υπολογίσετε η αντίστροφη παράγωγος.

Απόδειξη:

$f'(x)=x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2=(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$

$f'(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ ή $x=\sqrt{2}$

$f'(x)>0 \ \forall x\in(-\infty,-\sqrt{2})$	$f'(x)>0 \ \forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$f'(x)>0 \ \forall x\in(\sqrt{2},+\infty)$
Άρα, η $f\uparrow$ στο $(-\infty,-\sqrt{2}]$.	Άρα, η $f\uparrow$ στο $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.	Άρα, η $f\uparrow$ στο $[\sqrt{2},+\infty)$

Άρα, η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και συνεχής ως πολυωνυμική

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\Rightarrow$ η f επί του $\mathbb{R}$ (από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών)

$\alpha=f(0), \beta=f(1), \gamma=f(\sqrt{2}), \delta=f(2)$

Επειδή $f'(\sqrt{2})=0$ η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\gamma=f(\sqrt{2})$.

Επειδή $f'(0)=4\neq 0$ η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha=f(0)$ με $(f^{-1})'(\alpha)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{4}$

Επειδή $f'(1)=1\neq 0$ η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\beta=f(1)$ με $(f^{-1})'(\beta)=\frac{1}{f'(1)}=1$.

Επειδή $f'(2)=4\neq 0$ η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\delta=f(2)$ με $(f^{-1})'(\delta)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{4}$

Άσκηση 6: Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^4\sin(\frac{1}{x})$ για $x\neq 0$ και $f(0)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε τις f' και f''.

β) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι συνεχής στο 0. Είναι η f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο 0;

Απόδειξη:

α) Για $x\neq 0$: $f'(x)=4x^3\sin(\frac{1}{x})+x^4\cos(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})=4x^3\sin(\frac{1}{x})-x^2\cos(\frac{1}{x})$.

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin(\frac{1}{x})-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^3\sin(\frac{1}{x})=0$

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3\sin(\frac{1}{x})-x^2\cos(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Για $x \neq 0$: $f''(x) = 12x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 4x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) -$

$- x^2\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 12x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 4x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

β) Το όριο της $f''(x)$ στο 0 δεν υπάρχει.

$x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ και $f''(x_n) = 12x_n^2 \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) - 6x_n \cos\frac{1}{x_n} - \sin 2n\pi \to 0$

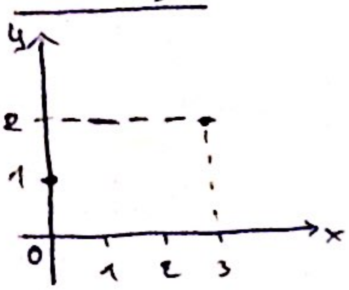
$y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \to 0$ και $f''(y_n) = 12y_n^2 \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) - 6y_n \cos\frac{1}{y_n} - \sin(2n\pi + \pi/2) \to -1.$

Εφόσον η f'' δεν είναι συνεχής στο 0, δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άρα, η f δεν είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο 0.

Άσκηση 12: Να βρεθεί το σημείο $(\alpha, 0)$ της ευθείας $y=0$ ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του από τα σημεία $(3,2)$ και $(0,1)$ να είναι ελάχιστο.

Απόδειξη:



Η απόσταση του $(x,0)$ από το $(3,2)$: $\sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$

Η απόσταση του $(x,0)$ από το $(0,1)$: $\sqrt{(x-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{x^2+1}$

Άρα, το άθροισμα των αποστάσεων είναι $f(x) = \sqrt{x^2-6x+13} + \sqrt{x^2+1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+13}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x-3)\left(\sqrt{x^2+1}\right) + x\left(\sqrt{x^2-6x+13}\right)}{\left(\sqrt{x^2-6x+13}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots$

Άσκηση 13: Αν $\alpha > 1$ και $x > 0$ να δείξετε ότι $x^{\alpha} - 1 \geq \alpha(x-1)$ και να εξετάσετε πότε ισχύει γνήσια ανισότητα και πότε η ισότητα.

Απόδειξη:

Έστω $f(x) = x^a - 1 - ax + a \quad x \in (0,+\infty)$

$f'(x) = ax^{a-1} - a = a(x^{a-1} - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{a-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^{a-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{a-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x^{a-1} > 1 \overset{a>1}{\Leftrightarrow} x > 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^{a-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow x^{a-1} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Άρα, η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα, η f έχει γνήσιο ολικό ελάχιστο στο 1. $f(x) \geq f(1) \quad \forall x > 0$.

$x^a - 1 - ax + a \geq 0$

$x^a - 1 \geq a(x-1)$

Ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ (άρα για $x \neq 1 \quad f(x) > f(1) \Rightarrow \dots$).

Άσκηση 14: Να βρεθούν οι διαστάσεις κυλινδρικού δοχείου ανοικτού από επάνω, που να χωρά V λίτρα και να έχει την ελάχιστη δυνατή επιφάνεια.

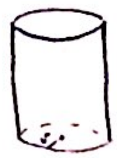
Απόδειξη:

Αν r είναι η ακτίνα της βάσης και h το ύψος, τότε $V = \pi r^2 h$ (I)

Επιφάνεια παράπλευρη και κάτω $E = \pi r^2 + 2\pi r h$ (II)

Εφόσον V δεδομένο και γνωστό

$(I) \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$

h 

Συνεπώς, $E = \pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0$

Αναζητούμε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(r) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0$

$f'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$

$f'(r) = 0 \Leftrightarrow \cancel{2}\pi r = \frac{\cancel{2}V}{r^2} \Leftrightarrow r^2 = \frac{V}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

$f'(r) > 0 \Leftrightarrow r > \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \quad , f'(r) < 0 \Leftrightarrow 0 < r < \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

} Η f παρουσιάζει στο $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ ολικό ελάχιστο.

Η επιφάνεια γίνεται ελάχιστη όταν $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$,

οπότε $h = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2} = V^{1/3} \cdot \pi^{-1/3}$.